

A rendre pour le 3 Octobre 2018

## Exercice 1 - Inspiré d'ECRICOME 2004 ECT

L'exercice se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction  $f$  étant définie sur  $\mathbb{R}$  par : pour tout  $x$  réel,  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .

### Étude d'une fonction $g$ intermédiaire.

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $t+1 > 0$ , donc

- $t \rightarrow t$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$
- $t \rightarrow t+1$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annule pas sur cet intervalle.
- $t \rightarrow \ln(t+1)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

Donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonctions continues.

2. On a

$$\frac{t}{t+1} = \frac{t}{t(1+1/t)} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ . Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty.$$

3. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que somme, quotient et composée de fonction dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad g'(t) &= \frac{(t+1) - t}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{-t}{(t+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

4. La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $g$  admet donc un maximum en 0. Or  $g(0) = 0$ .  
Donc

$$\forall t \geq 0, g(t) \leq 0.$$

### Étude de la fonction $f$ .

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= e^{-x} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} g(e^x).}$$

6. On a

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$$

Et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X}$ . Par taux d'accroissements,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.}$$

On a aussi

$$e^{-x} \ln(1 + e^x) = e^{-x} \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = e^{-x}(x + \ln(1 + e^{-x})) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissance comparée et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ . Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

7. Pour tout  $x$  réel,  $e^x > 0$  et donc  $g(e^x) < 0$ . De plus,  $e^{-x} > 0$  et on a donc  $f'(x) < 0$ .

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

On trace alors son tableau de variations.

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de $f$	$1 \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \end{array} \ln(2) \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \end{array} \frac{\ln(1+e)}{e} \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \end{array} 0$			

8. Sachant que

- $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,
- $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ ,
- $f([0, 1]) = \left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$ .

$f$  est une bijection sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\left[ \frac{\ln(1+e)}{e}; \ln(2) \right] \subset [0; 1]$  (On dit que  $f$  est stable par  $[0; 1]$ ). On a alors,

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.}$$

9. Compléter le script suivant qui permet de tracer la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  (on prendra 1000 points en abscisses).

```
function ..y = f(x)..
    y = ..exp(-x) * log(1+exp(x))..
..endfunction..

x = ..linspace(0,1,1000)..
plot(x,f)
```

### Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Voici le script Scilab

```
n = input("Donnez une valeur de n")
u = 0
for k = 1 : n
    u = f(u) \\La fonction f étant définie à la question précédente
end
disp("Le nième terme de la suite est " + string(u))
```

11. Soit  $x \in [0, 1]$ . Premièrement,  $f'$  est négative donc  $|f'(x)| = -f'(x) = -e^{-x}g(e^x)$ . Deuxièmement, comme la fonction  $g$  est décroissante et négative,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\implies g(1) \geq g(e^x) \geq g(e) \\ &\implies -g(1) \leq -g(e^x) \leq -g(e) \\ &\implies -g(e^x) \leq |g(e)| \end{aligned}$$

Enfin,  $e^{-x} \leq 1$ . En combinant toutes ces inégalités, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq |g(e)|.}$$

12. On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $h(x) = f(x) - x$ . (Remarque, il n'y avait pas de question 12)

13. La fonction  $h$  est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. Et

$$\forall x \in [0, 1], \quad h'(x) = f'(x) - 1 = e^{-x}g(e^x) - 1$$

Or  $g$  est négative sur  $[0, 1]$  donc  $h'$  est strictement négative sur  $[0, 1]$ .

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1].}$$

- (a) On applique le théorème de la bijection. On calcule  $h(0) = f(0) - 0 \simeq 0,69$  et  $h(1) = f(1) - 1 \simeq -0,52$

- La fonction  $h$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- La fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .
- $h(0) > 0$  et  $h(1) < 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $h(\alpha) = 0$ .

- (b) L'équation  $f(x) = x$  est équivalente à  $h(x) = 0$  et cette dernière équation à une unique solution. Donc il existe un unique  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

14. On montre les propriétés suivantes  $\mathcal{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$ .

- **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $0 \leq u_0 \leq 1$ . Or,  $u_0 = 0$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $0 \leq u_n \leq 1$ )

$$0 \leq u_n \leq 1 \implies 0 \leq f(u_n) \leq 1$$

(d'après la question 7). La proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des propositions  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .

## Exercice 2 : Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ - Ecricome ECT 2004

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n - 1} + 1.$$

1. On étudie dans cette partie la fonction  $f : x \rightarrow e\sqrt{x - 1} + 1$ .

(a) Pour trouver le domaine de définition de  $f$ , on résout l'inéquation

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

Le domaine de définition de  $f$  est donc  $\mathcal{D} = [1; +\infty[$ .

(b) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]1; +\infty[$  en tant que composée et somme de fonction dérivable :

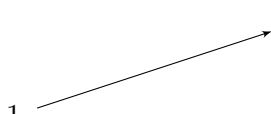
$$f'(x) = \frac{e}{2\sqrt{x - 1}}.$$

Une racine carrée étant toujours positive, on a  $\forall x \in ]1; +\infty[, f'(x) > 0$ .

(c) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e\sqrt{X} + 1 = +\infty$ . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On peut construire le tableau de variation suivant :

$x$	1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+	
Variation de $f$		

(d) On résout l'équation

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff e\sqrt{x - 1} + 1 = x \\
 &\iff e\sqrt{x - 1} = x - 1 \\
 &\iff e^2(x - 1) = (x - 1)^2 \\
 &\iff e^2x - e^2 = x^2 - 2x + 1 \\
 &\iff x^2 - (2 + e^2)x + 1 + e^2 = 0
 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de l'équation d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-(2 + e^2))^2 - 4(1 + e^2) \\
 &= 4 + 4e^2 + e^4 - 4 - 4e^2 \\
 &= e^4 > 0
 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(2 + e^2) - \sqrt{e^4}}{2} & x_2 &= \frac{(2 + e^2) + \sqrt{e^4}}{2} \\ &= \frac{2}{2} & &= \frac{2 + 2e^2}{2} \\ &= 1 & &= 1 + e^2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = x$  est donc  $\mathcal{S} = \{1; 1 + e^2\}$ .

(e) D'une part on a

$$\begin{aligned} f(x) \geq x &\iff e\sqrt{x-1} + 1 \geq x \\ &\iff e\sqrt{x-1} \geq x-1 \\ &\iff e^2(x-1) \geq (x-1)^2 \quad \text{car } x-1 \geq 0 \text{ et la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\iff e^2x - e^2 \geq x^2 - 2x + 1 \\ &\iff x^2 - (2 + e^2)x + 1 + e^2 \leq 0 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on peut construire le tableau de signe de  $x^2 - (2 + e^2)x + 1 + e^2$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$1 + e^2$	$+\infty$	
Signe du Polynôme	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Ainsi,

$$f(x) \geq x \iff x \in [1; 1 + e^2]$$

(f) On a  $f'(1 + e^2) = \frac{e}{2\sqrt{1 + e^2 - 1}} = \frac{1}{2}$  et  $f(1 + e^2) = e\sqrt{1 + e^2 - 1} + 1 = 1 + e^2$ . On en déduit l'équation de la tangente à la fonction  $f$  en  $x = 1 + e^2$ ,

$$y = f'(1 + e^2)(x - (1 + e^2)) + f(1 + e^2) = \frac{1}{2}x + \frac{1 + e^2}{2}.$$

2. On considère  $u_0 = 1 + e^2$ . On montre par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

- On cherche à montrer les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n = 1 + e^2\}$ .
- **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $u_0 = 1 + e^2$ . Or d'après l'énoncé,  $u_0 = 1 + e^2$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $u_n = 1 + e^2$ )

On utilise la définition de la suite, à savoir  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Or comme  $u_n = 1 + e^2$ , on a

$$u_{n+1} = f(1 + e^2) = 1 + e^2 \quad (\text{d'après la question 1(d)})$$

La proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 + e^2$ , en d'autres termes, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante

3. On cherche à déterminer une expression pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $u_0 > 1$ . On pose alors

$$v_n = \ln(u_n - 1).$$

(a) — On cherche à montrer les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n > 1\}$ .

— **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $u_0 > 1$ . Or d'après l'énoncé,  $u_0 > 1$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $u_n > 1$ )

On a alors

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\iff u_n - 1 > 0 \\ &\iff \sqrt{u_n - 1} > \sqrt{0} \quad (\text{Car la fonction racine est croissante}) \\ &\iff e\sqrt{u_n - 1} > 0 \\ &\iff e\sqrt{u_n - 1} + 1 > 1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u_{n+1} > 1$ , la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des propositions  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

— **Conclusion** :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$

(b) On a montré précédemment que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$ .  $\text{Ainsi } v_n \text{ est bien définie.}$

(c) On calcule pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln(e\sqrt{u_n - 1} + 1 - 1) \\ &= \ln(e\sqrt{u_n - 1}) \\ &= \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n - 1}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) \end{aligned}$$

On en déduit la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n$ .

(d) On pose la suite  $w_n = v_n - 2$  et ainsi pour tout  $n$  entier,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}v_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}(w_n + 2) - 1 \\ &= \frac{1}{2}w_n. \end{aligned}$$

(e) La suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ . On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Enfin

$$v_n = w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \text{ et comme } w_0 = v_0 - 2,$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (v_0 - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2.}$$

(f) D'après les questions précédentes,  $v_0 = \ln(u_0 - 1)$  et

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n - 1) &\iff u_n - 1 = e^{v_n} \\ &\iff u_n = e^{v_n} + 1 \\ &\iff u_n = \exp\left((v_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) + 1 \end{aligned}$$

On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left((\ln(u_0 - 1) - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) + 1.$$

### Exercice 3 : Récurrences

1. On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 2$ .

- On cherche à montrer les propositions  $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n < 2\}$ .
- **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $0 < u_0 < 2$ . Or d'après l'énoncé,  $u_0 = 1$ , donc compris entre 1 et 2. La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $0 < u_n < 2$ )

On utilise la définition de la suite, à savoir  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ . Or

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 2 &\implies 2 \leq 2 + u_n \leq 4 \\ &\implies \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2 \\ &\implies \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \\ &\implies 0 \leq u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

La proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2.}$

2. Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

- On cherche à montrer les propositions  $\mathcal{P}_n : \{(1 + a)^n \geq 1 + na\}$ .
- **Initialisation** : La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$ . Or  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour un certain rang  $n$ . (On a donc  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ )

$$\begin{aligned} (1 + a)^n \geq 1 + na &\implies (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) \\ &\implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2 \\ &\implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \\ &\implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

En effet,  $na^2 \geq 0$  car  $n \in \mathbb{N}$  et  $a^2 \geq 0$ . La proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na.}$

3. La suite de Fibonacci ( $u_n$ ) est défini par  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  et  $u_0 = u_1 = 1$ . On démontre par récurrence forte que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$ .

- On cherche à montrer les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \in \mathbb{N}\}$ .

- **Initialisation** : Les propriétés  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont vraies puisque  $u_0 = 1 \in \mathbb{N}$  et  $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$ .
- **Hérédité** : On suppose que  $\mathcal{P}_n$  et  $\mathcal{P}_{n+1}$  sont vraies pour un certain rang  $n$ . On veut montrer que  $\mathcal{P}_{n+2}$  est vraie. On a donc  $u_n \in \mathbb{N}$  et  $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ . Or, comme  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  on a  $u_{n+2} \in \mathbb{N}$ . La somme de deux entiers est un entier. La proposition  $\mathcal{P}_{n+2}$  est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.
- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathbb{N}$ .